Universidad Simón Bolívar
Departamento de Matemáticas
Puras y Aplicadas

Matemáticas I (MA1111)
1^{er} Examen Parcial (30 %)
Abr – Jul 2016

Turno 3-4
Duración: 1 hora 50 minutos

RESPUESTAS

Pregunta 1. (6 ptos.) Determine todos los valores de x que satisfacen la siguiente desigualdad

$$\left|2-\frac{1}{5x-1}\right| \geq 1.$$

Solución:

$$\left|2-\frac{1}{5x-1}\right| \geq 1 \iff 2-\frac{1}{5x-1} \leq -1 \quad \text{o} \quad 1 \leq 2-\frac{1}{5x-1}$$

$$\iff \frac{15x-4}{5x-1} \leq 0 \quad \text{o} \quad 0 \leq \frac{5x-2}{5x-1}$$

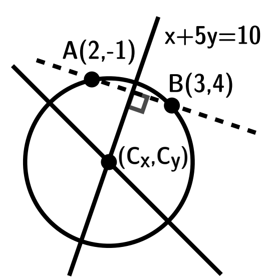
		$\frac{1}{5}$	$\frac{4}{15}$
$15x-4$	$-$	$-$	$+$
$5x-1$	$-$	$+$	$+$

		$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$
$5x-2$	$-$	$-$	$+$
$5x-1$	$-$	$+$	$+$

Así,

$$\left|2-\frac{1}{5x-1}\right| \geq 1 \iff x \in \Big(-\infty, \frac{1}{5}\Big) \cup \Big(\frac{1}{5}, \frac{4}{15}\Big] \cup \Big[\frac{2}{5}, \infty\Big)$$

Pregunta 2. (6 ptos.) Encuentre la ecuación de la circunferencia que pasa por los puntos $A(2,-1)$, $B(3,4)$ y cuyo centro está en la recta $x+y=2$.



Solución: Denotemos por (C_x, C_y) al centro de la cinrcunferencia y por r al radio. La ecuación general de la circunferencia es

$$(x-C_x)^2 + (y-C_y)^2 = r^2.$$

Luego,

$$\underbrace{(2 - C_x)^2 + (-1 - C_y)^2}_{A \text{ pertenece a la circunferencia}} = r^2 = \underbrace{(3 - C_x)^2 + (4 - C_y)^2}_{B \text{ pertenece a la circunferencia}}$$

por lo que

$$\begin{aligned} (2 - C_x)^2 - (3 - C_x)^2 &= (4 - C_y)^2 - (-1 - C_y)^2 \\ (-1)(5 - 2C_x) &= (5)(3 - 2C_y) \end{aligned}$$

de donde las coordenadas del centro satisfacen la ecuación

$$C_x + 5C_y = 10,$$

lo cual es equivalente a determinar que el centro está sobre la recta $x + 5y = 10$, que pasa por el punto medio entre A y B y es perpendicular a la que recta que contiene a estos dos puntos. Como el centro está sobre la recta $x + y = 2$ entonces

$$C_x + C_y = 2.$$

La intersección de estas dos rectas determina las coordenadas del centro; ellas son $C_x = 0$ y $C_y = 2$. El radio de la circunferencia se puede calcular hallando la distancia entre el punto A y el centro. Así,

$$r = \sqrt{(0 - 2)^2 + (2 - (-1))^2} = \sqrt{13}.$$

Por lo tanto, la ecuación de la circunferencia deseada es

$$x^2 + (y - 2)^2 = 13.$$

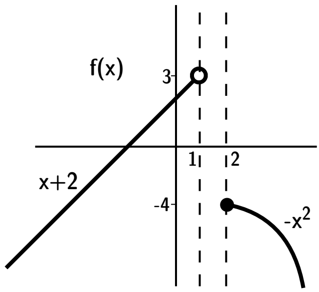
Pregunta 3. (6 ptos.) Dadas las funciones

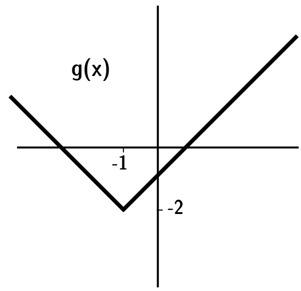
$$f(x) = \begin{cases} -x^2 & , \text{si } x \geq 2 \\ x + 2 & , \text{si } x < 1 \end{cases} \qquad \text{y} \qquad g(x) = |x + 1| - 2,$$

a. Haga un bosquejo de las gráficas de ambas funciones;

b. Halle $f \circ g$ y su dominio.

Solución:





Como $\mathrm{Dom}(g) = \mathbb{R}$ y $\mathrm{Dom}(f) = (-\infty, 1) \cup [2, \infty)$, entonces

$$\begin{aligned}
\mathrm{Dom}(f \circ g) &= \{x \text{ tales que } x \in \mathrm{Dom}(g) \text{ y } g(x) \in \mathrm{Dom}(f)\} \\
&= \{x \text{ tales que } g(x) \in (-\infty, 1) \cup [2, \infty)\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
g(x) < 1 &\Leftrightarrow |x+1| - 2 < 1 \Leftrightarrow |x+1| < 3 \\
&\Leftrightarrow -3 < x + 1 < 3 \Leftrightarrow -4 < x < 2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
g(x) \geq 2 &\Leftrightarrow |x+1| - 2 \geq 2 \Leftrightarrow |x+1| \geq 4 \\
&\Leftrightarrow x + 1 \leq -4 \quad \text{o} \quad 4 \leq x + 1 \\
&\Leftrightarrow x \leq -1 \quad \text{o} \quad 3 \leq x
\end{aligned}$$

Así,

$$\big(f \circ g\big)(x) = f\big(g(x)\big) = \begin{cases} -\big(g(x)\big)^2 & , \text{ si } g(x) \geq 2 \\ g(x) + 2 & , \text{ si } g(x) < 1 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} -\big(|x+1| - 2\big)^2 & , \text{ si } x \in (-\infty, -5] \cup [3, \infty) \\ |x+1| & , \text{ si } x \in (-4, 2) \end{cases}$$

y

$$\mathrm{Dom}(f \circ g) = (-\infty, -5] \cup (-4, 2) \cup [3, \infty).$$

Pregunta 4. (6 ptos.) Determine el dominio de la función

$$f(x) = \sqrt{\frac{x^3 + x - 2}{x^2 - 7x + 12}}$$

Solución:

$$x \in \text{Dom}(f) \iff \frac{x^3+2-2}{x^2-7x+12} \geq 0$$

$$\iff \frac{(x-1)(x^2+x+2)}{(x-4)(x-3)} \geq 0$$

	1	3	4	
$(x-1)$	$-$	$+$	$+$	$+$
(x^2+x+1)	$+$	$+$	$+$	$+$
$(x-4)$	$-$	$-$	$-$	$+$
$(x-3)$	$-$	$-$	$+$	$+$

Así,

$$x \in \text{Dom}(f) \Leftrightarrow x \in [1,3) \cup (4,\infty)$$

Pregunta 5. (6 ptos.) Sea $f(x) = \begin{cases} |x+1|-1 & , \text{ si } x<0 \\ \text{sen}(x) & , \text{ si } x \geq 0 \end{cases}$

a. Bosqueje la gráfica de f;

b. Determine el dominio y el rango de f;

c. Determine el intervalo más grande que contenga a 1 sobre el cual f es inyectiva.

Solución:

$\text{Dom}(f) = \mathbb{R}$, $\text{Rango}(f) = [-1,\infty)$

El intervalo más grande que contiene a 1 sobre el cual f es inyectiva es $\left[-1, \frac{\pi}{2}\right]$.